
Daxiyangguo

Portuguese Journal of Asian Studies | Revista Portuguesa de Estudos Asiáticos

ISSN: 1645-4677 | ISSN-e: 2184-9129 | 2022, Número 29, páginas 55-81

DOI: 10.33167/1645-4677.DAXIYANGGUO2022.29/pp.55-81

Périplo introdutório pelos manuais da antiga matemática chinesa

Introductory Tour of the Books of Chinese Ancient Mathematics

Cláudia Ribeiro *

* Centro Científico e Cultural de Macau, Lisboa, Portugal; Email: thunderhorse@outlook.pt

RESUMO

Num primeiro momento, através dos mais importantes dos Dez Clássicos da Matemática, compilados na dinastia Tang, relato as conquistas alcançadas durante aquela que é considerada a primeira grande era da matemática chinesa. Num segundo momento, detenho-me sobre as obras mais relevantes publicadas na segunda grande era da matemática chinesa, as dinastias Song e Yuan. Por fim, assinalo brevemente o período de relativa decadência que se seguiu e a renovação proporcionada pela introdução da matemática vinda da Europa.

Palavras-chave: matemática; história; China antiga; Dez Clássicos da Matemática

ABSTRACT

In a first moment, by focusing on the most important of the Ten Classics of Mathematics, compiled in the Tang dynasty, I describe the key moments of what is seen as the first golden age of Chinese mathematics. Next, I describe the most relevant works published during the Song and Yuan dynasties, the second golden age of Chinese mathematics. Finally, I comment briefly on the subsequent period of relative decline, and on the renewal provided by the introduction of mathematics coming from Europe.

Keywords: mathematics; history; ancient China; Ten Classics of Mathematics

1. Introdução

A matemática tradicional chinesa conheceu um primeiro auge desde a dinastia Han (206 a.C. a 220 d.C.) até às dinastias Wei, Jin e Norte e Sul (entre 220 e 589 d.C.). Seguiu-se um período de relativa estagnação durante as dinastias Sui (581-618 d.C.) e Tang. Todavia, em 1084 (7.º ano de Yuanfeng), o Secretariado da Dinastia Song do Norte imprimiu e publicou aquela que era a mais importante obra de matemática até então, o *Jiuzhang Suanshu* (九章算術, *Nove Capítulos de Arte Matemática*), da dinastia Han, e ainda outros clássicos da matemática desta mesma dinastia.

Esta grande iniciativa de disseminação de conhecimento teve como consequência provável o segundo auge da história da matemática chinesa, nas dinastias Song e Yuan. Começaram a ser publicadas muitas obras de matemática novas, fenómeno que se prolongaria até meados da dinastia Yuan.

Durante a dinastia Song do Norte, organizou-se ainda em Bianjing (Kaifeng) um centro de investigação em matemática que contava com Chu Yan e Jia Xian. Contribuiu significativamente para avanços na extracção de raízes e na abstracção de algoritmos. Na segunda metade do século XIII criaram-se simultaneamente dois centros de matemática, um no norte, no curso inferior do rio Yangtse, que contava com matemáticos do calibre de Qin Jiushao e Yang Hui (杨辉), e outro no sul, que desenvolveu o *gougu* (勾股, o teorema dito ‘de Pitágoras’) contendo um círculo e que enumerou e descobriu os métodos de resolução de equações de ordem superior e de equações múltiplas através do *tianyuan shu* (天元術, um procedimento algébrico para equações polinomiais), entre outros.

A partir de meados da dinastia Yuan e durante a dinastia Ming (1368-1644 d.C.) o desenvolvimento da matemática sofreu uma mudança drástica. Por um lado, a matemática popularizou-se, sendo largamente difundida mas, por outro lado, era utilizada apenas como ferramenta prática. Acresce que o ábaco se

tornou central, substituindo paulatinamente o velho método das varinhas de bambu.

Mas, mais importante ainda, arquivaram-se as grandes obras de matemática das dinastias Han, Tang, Song e Yuan. Deixaram de ser reimpressas, tendo muitas delas caído no esquecimento ou acabado por se perder. Foi o que sucedeu com a última parte do *Jiuzhang*, a obra cimeira da matemática tradicional. Além disso, o que dela restou foi mantido não só fora do alcance do público em geral como da esmagadora maioria dos estudiosos.

Foi então que chegaram da Europa jesuítas (Matteo Ricci, Ferdinand Verbiest, Adam Schall, Lodovico Buglio...) cujos conhecimentos de matemática contribuíram decisivamente para a renovação do panorama dos conhecimentos chineses nessa área.

Acompanhando as grandes obras de matemática que foram sendo publicadas, aponto as conquistas que alcançaram e a sua contribuição para o avanço da disciplina. Baseio-me largamente na obra de Cullen (1996) para o *Zhoubi*, e, para os restantes, na de Martzloff (1997) e de Au Yong (2018). Adoto uma perspectiva internalista que se focaliza sobretudo nas duas grandes épocas de desenvolvimento da matemática tradicional: a primeira da dinastia Han até às dinastias Jin, Wei e Norte e Sul; a segunda durante as dinastias Song e Yuan.

2. Matemática e cálculo

Os antigos matemáticos chineses efectuavam cálculos (籌算 *chousuan*) com varinhas de bambu (籌, *chou*) sobre uma superfície, método que já era adoptado no Período dos Reinos Combatentes, em 445-221 a.C. (Au Yong, 2018, p. 57). Tratava-se da melhor ferramenta de cálculo do mundo. Organizavam as varinhas em diferentes configurações para representar os números como uma sequência de algarismos de acordo com um sistema posicional. Deduzia-se o valor de cada número do lugar que ocupava na sequência, tal como no nosso sistema de numeração.

Para as unidades, colocavam-se as varinhas verticalmente; para as dezenas, colocavam-se horizontalmente; para as centenas, colocavam-se verticalmente; para os milhares horizontalmente, para os dez milhares verticalmente e assim por diante. Logo, um número podia ser representado por dígitos dispostos vertical e horizontalmente, da direita para a esquerda na ordem usual de unidades, dezenas, centenas, milhares, dez mil, etc. Para uma descrição pormenorizada, ver Chemla (1985) ou Li e Du (1987, pp. 6-19).

Este sistema de representação parece não permitir distinguir 1 de 100, dado ambos serem representados por uma varinha vertical. No entanto, para começar uma operação, colocavam-se os números sobre os quais se ia operar uns

sob os outros, de tal modo que os algarismos da mesma ordem se correspondiam. Disponha-se, pois, do valor dos números de uns em relação aos outros, o que assegurava o bom desenrolar das operações em questão.

De acordo com Joseph Needham, autor do ciclópico *Science and Civilization in China*, e ainda de acordo com Li e Du (1987), um espaço entre conjuntos de varinhas deve ser interpretado como significando um zero. 104 escrever-se-ia $\text{||} \text{|||}$ e 1004 escrever-se-ia $\text{—} \text{|||}$.

Martzloff (1997, p. 204 e sgs.), porém, defende que a falta de documentação não permite decidir quanto à existência do zero na China antiga. Afirma ser demasiado difícil distinguir se o espaço servia para separar dois números claramente ou se, como Needham supunha, significava um zero. Se o zero era efetivamente conhecido, não se tratava do zero enquanto número com o mesmo estatuto independente dos demais números. Isto porque nenhum problema chinês apresenta como solução o número zero. E porque o zero, ao contrário dos outros números, nunca era sujeito livremente a operações. Martzloff admite, todavia, que no caso de determinados matemáticos (por exemplo, Xiahou Yang 夏侯阳, na primeira metade do séc. VI d.C.), o zero surge enquanto símbolo que, acrescentado depois das unidades finais de um número, torna possível multiplicar esse número pela base (dez na base decimal).

Quanto ao zero enquanto símbolo que aponta a ausência de certas ordens de unidades, os historiadores também se dividem. Apenas a partir do séc. VIII d.C. se pode afirmar sem hesitar que os chineses realmente representavam o zero: como um ponto (provavelmente, de origem indiana), um círculo ou um quadrado, conforme a época. (Martzloff, 1997, p. 207)

Os chineses da dinastia Han estavam familiarizados com um sistema decimal. Eram capazes, pelo menos desde o séc. II d.C., de expressar à sua maneira potências de dez (ou seja, expressar 100 como 10^2 , etc.). Tratava-se do melhor sistema de notação de contagem decimal a nível mundial. O sistema prestava-se a cálculos numa matriz de linhas e colunas, onde bastava ter o valor da localização horizontal (da direita para a esquerda) para determinar a potência de dez. Os chineses também eram peritos em fracções, o que não sucedia nas outras civilizações, que tendiam a evitá-las.

De acordo com um decreto de 656 d.C. do imperador Gaozong, os *Dez Clássicos da Matemática* (算經十書 *suanjing shishu*), organizados, corrigidos e anotados por uma equipa supervisionada por Li Chunfeng (李淳風, 602? – 670), director do Departamento Imperial de Astronomia e Astrologia (太史令 *taishiling*), passariam a ser utilizados como manuais na recém-criada Academia Imperial de Matemática (Chemla, 2019, p. 100-101). Os *Dez Clássicos* eram os seguintes: *Zhoubi suanjing* (周髀算經, *Clássico de Matemática do Gnómon dos Zhou*), *Jiuzhang*

suanshu (九章算術, *Nove Capítulos de Arte Matemática*), *Haidao suanjing* (海島算經, *Clássico da Matemática da Ilha Marítima*), *Sunzi suanjing* (孫子算經, *Manual Matemático de Sun Zi*), *Zhui shu* (綴述, *Método de Interpolação*), *Xiahou Yang suanjing* (夏侯陽算經, *Clássico de Matemática de Xiahou Yang*), *Zhang Qiujian suanjing* (張丘建算經, *Clássico de Matemática de Zhang Qiujian*), *Wucaosuanjing* (五曹算經, *Clássico de Matemática dos Cinco Departamentos Administrativos*), *Wujing suanshu* (五經算術, *A Arte Matemática dos Cinco Clássicos*) e *Jigu suanjing* (緝古算經, *Clássico da Continuação da Matemática Antiga*). No estudo da matemática na Academia Imperial da dinastia Tang, a eles se vieram juntar o *Shushu jiyi* (數術記遺, *Escritos sobre Arte Matemática*), que viria a tomar o lugar do *Zhui shu* entre os Dez Clássicos, e o *Sandeng shu* (三等術, *A Arte dos Três Graus*) (Au Yong, 2018, p. 32).

É sobre os mais importantes dos *Dez Clássicos* que me irei debruçar de seguida.

3. A primeira grande época da antiga matemática chinesa: da dinastia Han às dinastias Wei, Jin, Sul e Norte

O *Zhoubi*

A primeira posição na antologia dos *Dez Clássicos da Matemática* foi ocupada por uma obra intitulada *Zhoubi suanjing*, ou *Clássico de Matemática do Gnómon dos Zhou*. Como faz notar Li Yan e Du Shiran (1987, p. 25), *zhou* significa igualmente “perímetro” mas, para Needham, o termo fazia referência à dinastia Zhou. Há textos da dinastia Song que seguem esta última interpretação.

A datação exacta do *Zhoubi* é objecto de debate e muitos a situam algures entre o séc. I a.C. e o séc. I d.C. (por exemplo, Cullen 1996). Chemla (2013) argumenta a favor de uma data anterior a 100 a.C. Através da análise da terminologia utilizada para a operação da divisão, mostra que o *Zhoubi* recorre ao termo 除 *chu* de modo análogo a textos recentemente descobertos e anteriores a 100 a.C., onde *chu* só surge ligado à subtracção; não o utiliza de modo análogo ao posterior clássico *Jiuzhang suanshu* onde *chu* indica a divisão.^[1]

A não ser que se tenham em conta os comentários adicionados no séc. III d.C., como o de Zhao Shuang (趙爽), a contribuição do *Zhoubi* para a matemática já então existente não era de grande vulto. Os conhecimentos matemáticos expostos eram importantes sobretudo no âmbito da astronomia. Com efeito,

1. Entre esses textos descobertos há algumas décadas e escritos em tirinhas de bambu contam-se o *Shu* (數, *Matemática*), que surgiu no mercado de antiguidades e é provavelmente do séc. III a.C. e do Reino de Qin e o *Suanshu shu*, (算數書, *Livro dos Procedimentos Matemáticos*), datado de 186 a.C. e descoberto num túmulo no Hubei. Para uma comparação entre a matemática do *Suanshu Shu* e a do *Jiuzhang* ver Dauben (2014) e para uma comparação entre as mundivisões subjacentes a essas matemáticas ver Chemla (2013).

a maior parte do texto consiste em especulações cosmológicas acerca da dimensão do universo, baseadas tanto em observações como em matemática. Os cálculos das dimensões do cosmos eram efectuados através da observação da sombra projectada por um gnómon simples, com a forma de um tubo, o *bi* (髀). Também era com este instrumento que os antigos astrónomos chineses mediam sombras solares e faziam observações das estrelas.

O *Zhoubi* relata a cosmografia segundo a qual o céu se assemelha a um guarda-sol que roda num eixo vertical sobre uma Terra plana, *gaitianshuo* (蓋天說). Trata-se de uma das duas cosmografias principais da China antiga. A segunda, posterior, acreditava que o céu era esférico, *huntianshuo* (渾天說). O *Zhoubi* é um caso único de relato racional e matematizado de um cosmos no qual a Terra é considerada plana. Contudo, é uma obra não tanto de *tianwen* (天文, “padrões celestes”) mas de matemática astronómica e cosmologia quantitativa, *lifa* (歷法, “métodos de calendário”, calendariologia).

A obra contém um diálogo entre um mestre, Chen Zi (陳子), e um discípulo, Rong Fang (榮方). O teorema *gougu* (勾股), conhecido no Ocidente como ‘de Pitágoras’, é introduzido quando Chen Zi explica como determinar a distância entre o sol e a Terra através da sombra projectada pelo sol do meio-dia, para tanto utilizando, é óbvio, unidades de grandeza chinesas, como *li* (厘), *chi* (尺) ou *cun* (寸)². Chen Zi revela a Rong Fang o ‘princípio da sombra’: por cada 1000 *li* para sul em direcção ao sol do meio-dia, a sombra de um gnómon de 8 *chi* diminui 1 *cun*. Em termos matemáticos, o que torna o *Zhoubi* único é este uso do ‘princípio da sombra um *cun* para mil *li*’ para obter as distâncias dos corpos celestes. Parte-se de que ‘80 *cun* dá 1 *cun* de diâmetro’ para ‘80 *li* dá 1 *li* de diâmetro’, através da simples substituição de *cun* por *li*. Só se precisa realmente de fazer cálculos quando se trata de achar quantas vezes 80 *li* há em 100 000 *li*.

Chen Zi relata o processo de forma mais verbal do que computacional: aguardar até a base ser de 6 *chi* e pegar num tubo de bambu com o diâmetro de 1 *cun* e 8 *chi* de comprimento. Apanhar a luz (através do tubo) e observá-la: o diâmetro interno cobre o sol por completo, ou seja, o sol cabe exactamente no diâmetro interno. Assim, percebe-se que 80 *cun* dá 1 *cun* de diâmetro. Portanto, começa-se na base e toma-se o *bi* [gnómon] como altitude. A 60 000 *li* a partir do *bi*, no ponto subsolar, o *bi* não projecta uma sombra. Desde esse ponto até ao sol são 80 000 *li*. Para obter a distância oblíqua [a partir da nossa posição] até ao sol, toma-se o ponto subsolar como base e toma-se a altura do sol como

2. O comprimento preciso destas unidades e as razões entre elas variavam ao longo do tempo e do espaço. A unidade de distância básica era o *chi*. 1 *chi* = 10 *cun*. Na dinastia Zhou, 1 *chi* = 19 cm. Na dinastia Han, 1 *chi* = 23 cm. No início da dinastia Zhou, 1 *li* = 358 m. Na dinastia Han, 1 *li* = 415.80 m. Acresce que o número de *chi* por *li* era por vezes alterado.

altitude. Eleva-se ao quadrado tanto a base quanto a altitude, adicionam-se ambas e extrai-se a raiz quadrada. Obtém-se desse modo a distância oblíqua até ao sol. A distância oblíqua até ao sol a partir da posição do *bi* é de 100 000 *li*. Ora, 80 *li* dá 1 *li* de diâmetro; logo, 100 000 *li* dá 1250 *li* de diâmetro. Pode-se declarar, pois, que o diâmetro do sol é de 1250 *li* (cf. Cullen, 1996, p.78).

Além deste, o *Zhoubi* oferece mais resultados de medições do mundo, cujo interesse, como comenta Au Yong “não reside na justeza dos seus valores numéricos, mas no facto de os chineses terem uma visão articulada do mundo tão elaborada que presumiam que as dimensões deste ou eram conhecidas ou eram susceptíveis de cálculo” (2018, p. 41).

O *Zhoubi* recorre a números bastante grandes e com variadas unidades e partes de fracções, assumindo que o leitor sabe somar, diminuir, multiplicar, dividir e extrair raízes quadradas e cúbicas. Apresenta um processo bastante exacto para a extracção de raízes quadradas (a extracção das raízes cúbicas partilhava uma base geométrico-algébrica semelhante). Era considerada uma forma de divisão (Swetz, 1979, pp. 14-15). Os matemáticos não se limitavam a resultados de três dígitos, mas sabiam expandir o processo até tantas casas decimais quanto as necessárias. As fracções decimais eram conhecidas na China desde o séc. V a.C.

No comentário do séc. III d.C. de Zhao Shuang, acima mencionado, encontra-se uma demonstração da validade do teorema *gougu* (勾股, dito ‘de Pitágoras’), uma prova visual, sem palavras, *xiantu* (弦圖):

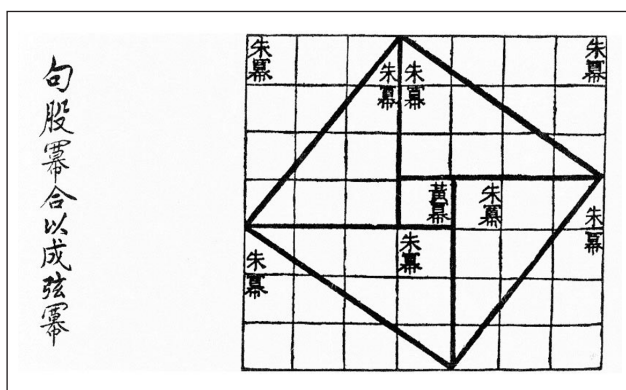


FIGURA 1

Xiantu. A área dos quatro triângulos em negrito é igual à área do grande quadrado oblíquo menos o pequeno quadrado central

Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c3/Chinese_pythagoras.jpg

A metodologia utilizada era geométrico-matemática. Numa lista de quinze fórmulas disponíveis para resolver problemas sobre triângulos rectângulos, desenvolviam-se procedimentos de tipo algébrico a partir da ligação entre a aritmética e da geometria. Essa geometria caracterizava-se pela importância das noções de ‘perpendicular’ e de ‘área’, assim como pela ausência da noção de ‘ângulo’.

Fica patente, pois, uma diferença de estilo em relação à demonstração do teorema de Pitágoras, que é de natureza numérica (o quadrado da hipotenusa de um triângulo rectângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos).

Outra característica de relevo do *Zhoubi* é refletir acerca da própria actividade matemática. Chen Zi observa que as técnicas e métodos matemáticos são sucintos mas com uma aplicação ampla; e que quando se faz uma única pergunta é necessário raciocinar por analogia, isto é, inferir vários tipos de raciocínios semelhantes a partir de uma única linha de argumentação, de modo a conseguir entender toda uma série de questões. Por outras palavras, através de uma única pergunta pode-se chegar à compreensão de uma miríade de questões. Declara ainda que há que distinguir categorias de modo a unir categorias. O que pretende dizer com isto é que, por um lado, há que levar a cabo a tarefa analítica de distinguir diferentes tipos de problemas; mas, por outro lado, essa análise deve conseguir agrupar problemas semelhantes que poderão ser tratados de forma sintética.

O *Jiuzhang*

Na segunda posição dos *Clássicos da Matemática* figurava o *Jiuzhang suanshu* (*Nove Capítulos de Arte Matemática*), do séc. I d.C.^[3] Embora compilado na dinastia Han, supõe-se que é produto de uma longa evolução, representando o desenvolvimento da matemática desde a dinastia Zhou até então. A edição sobrevivente mais antiga está incompleta e data do séc. XIII d.C., ou seja, de doze séculos após o original.

Veio a incorporar, entre outros, o excepcional comentário do matemático Liu Hui (劉徽), do séc. III d.C., e era considerada a obra mais importante do currículo da Academia Imperial de Matemática. O *Jiuzhang* exerceu uma influência decisiva em toda a produção matemática posterior. Foi aturadamente estudado por contabilistas, peritos em calendariologia e astrónomos, que copiaram os seus métodos de resolução e adoptaram os seus termos técnicos, estabelecendo-se como um modelo de linguagem da matemática e do cálculo. Está na

3. Para a tradução (para francês) e comentário detalhado a esta obra ver Karine Chemla e Guo Shuchun (2004) *Les Neuf Chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Paris: Dunod.

origem não só da tradição matemática chinesa, mas também da coreana, da japonesa e da vietnamita.

O *Jiuzhang* apresenta um trabalho já aprofundado com algoritmos de aritmética, de geometria e de álgebra que conduziu à criação de muitos tópicos novos de investigação. Estava na vanguarda mundial em várias frentes, precedendo em alguns casos outras culturas em centenas ou milhares de anos: nos cálculos aritméticos de fracções, na proporcionalidade e alocação proporcional, na extracção da raiz quadrada e da raiz cúbica, na solução de equações lineares, nas regras para a adição e subtracção de números negativos e positivos, na solução de triângulos rectângulos e de trios pitagóricos...

Trata-se do maior exemplo da aplicação do método do mestre Chen Zi “distinguir categorias de modo a unir categorias”, mencionado no *Zhoubi*. Ao invés de partir de um número relativamente pequeno de axiomas para a dedução de um grande número de proposições, vai no sentido inverso: começa com uma variedade quase infinita de problemas possíveis e propõe-se mostrar que se podem reduzir a nove categorias básicas passíveis de resolução através de nove métodos básicos.

Consiste numa colecção de duzentos e quarenta e seis problemas que traem a íntima conexão entre a matemática coeva e preocupações de tipo pragmático, relativas à burocracia e às obras de engenharia do estado (inspecção de terras e edifícios, impostos, etc.).

Em cerca de 60% dos casos, os problemas agrupam-se de acordo com a sua natureza específica: agrimensura dos campos, permuta de mercadorias, trabalhos de terraplanagem, imposto e corveia, medição de distâncias num terreno, etc. Também há material organizado de acordo com o grau de complexidade matemática. Por exemplo, o cálculo de áreas planas precede o de áreas curvas; a regra de três simples precede a regra de três composta, etc.

Cada sequência segue uma ordem. Começa por enunciar-se uma questão; de seguida, vem a resposta; depois, o procedimento que a permite obter; por fim, ao invés dos textos egípcios ou babilónicos, surge um ou mais comentários contendo justificações racionais. Esta forma de exposição do problema e da solução teve uma influência enorme em trabalhos matemáticos posteriores, que a adoptaram profusamente.

O *Jiuzhang* é a primeira obra escrita a nível mundial onde se discute sistematicamente a manipulação de fracções (no *Zhoubi* surgiam já cálculos complicados com fracções, mas os resultados não eram discutidos de forma sistemática). Essa sistematicidade não foi atingida na Índia até ao século VII d.C., e ainda mais tarde na Europa.

Através do *Jiuzhang* descobre-se que já se conhecia na China a eliminação de incógnitas (idêntica em essência à que se usa na álgebra actual) como um método sistemático para resolver um sistema de equações lineares. Trata-se de uma das invenções mais notáveis da matemática chinesa antiga. Aconteceu pelo menos 1500 anos antes de acontecer no Ocidente. Considera-se em geral que o equivalente mais antigo na Europa do método para resolver equações lineares simultâneas foi desenvolvido pelo matemático francês Buteo no século XVI.

O primeiro capítulo do *Jiuzhang* intitula-se “Medição de Terrenos” (方田), com cálculos de áreas de terras de cultivo. Os primeiros dezoito problemas discutem fracções simplificadas de forma sistemática, denominadores comuns, comparação de duas fracções com denominadores diferentes e adição, subtração, multiplicação e divisão de fracções. Os métodos assemelham-se bastante aos praticados actualmente no cálculo com fracções.

Eis o exemplo de um problema, referente à área do círculo:

Há um terreno circular, com a circunferência de 181 *bu* e diâmetro de 60 $\frac{1}{3}$ *bu*. Encontrar a área do terreno.

Resposta: 11 *mu* 畝 90 $\frac{1}{12}$ *bu* (1 *mu* = 240 *bu* [ao quadrado])

Método: multiplicar metade da circunferência e metade do diâmetro para obter a área em *bu*. Ou multiplicar o diâmetro por si próprio e, depois, por 3 e dividir por 4. Ou multiplicar a circunferência por si própria e dividir por 12. (cf. Straffin, 1998, p. 165)

O primeiro método está correto, mas os dados do problema e os outros dois métodos pressupõem que π seja igual a 3.

O segundo capítulo intitula-se “Painço e arroz” (粟米) e é sobre as proporções implicadas na permuta de cereais. O terceiro, “Distribuição proporcional” (衰分), é sobre como levar a cabo distribuições proporcionalmente. Um exemplo:

Há o dignitário-mor, o dignitário de quarta ordem, o dignitário de terceira ordem, o dignitário de segunda ordem e o dignitário de primeira ordem, totalizando cinco pessoas. Caçaram ao todo cinco veados. Se dividirem os veados de acordo com o seu estatuto, quanto cabe a cada um? (cf. Au-Yong, 2018, p. 50)

No quarto capítulo, “Redução de dimensões” (少廣), é dada uma área ou um volume e há que achar o comprimento de um lado, introduzindo métodos de extracção de raízes quadradas e cúbicas. No quinto capítulo, “Cálculos sobre Construções” (商功), calcula-se o volume de vários sólidos presentes na cons-

trução de estruturas e edifícios. No sexto, “Impostos Justos” (均輸), calcula-se como distribuir grão e aplicar corveias de acordo com o tamanho da população e a distância entre lugares. No sétimo, “Excesso e Defeito” (盈不足), utiliza-se o método da falsa posição tendo em vista a resolução de problemas bastante complexos. O oitavo, “Equações” (方程) é sobre problemas com equações lineares simultâneas, a noção de números positivos e negativos e os métodos de adição e subtração de números positivos e negativos. Por fim, o nono capítulo “Gougu” (勾股) debruça-se sobre o teorema dito ‘de Pitágoras’ e os métodos gerais de resolução de equações quadráticas. (Li e Du, 1987, pp. 33-4)

Alguns métodos são partilhados com outras civilizações da antiguidade: a regra de três simples (que aparece no papiro de Rhind), inversa ou composta, a regra de sociedade, o algoritmo de Euclides, o cálculo de triplos pitagóricos. Certos algoritmos, porém, só se encontram na China de então como, por exemplo, o que permite resolver todo o sistema numérico de n equações do primeiro grau por redução daquilo que corresponde à nossa matriz triangular para obter um sistema equivalente aplicando substituições sucessivas (o método de eliminação dito “de Gauss”).

O *Jiuzhang* mostra que os chineses da dinastia Han já lidavam destramente com os números negativos. Na Índia, os números negativos só surgiram no séc. VII. Na Europa, surgiram no séc. XIV, mas a sua aceitação plena só aconteceu no séc. XIX, pois eram considerados ‘absurdos’.

Não obstante nunca se encontrem nos problemas expostos, onde um número representa sempre uma certa quantidade de algo concreto e onde a solução nunca é um número negativo, a noção de números negativos vem explicada no capítulo “Equações” do *Jiuzhang*. Utilizam-se no contexto da aplicação de regras análogas às nossas regras de sinais. No *Jiuzhang*, tais regras dizem respeito apenas à adição e à subtração e nunca à multiplicação ou divisão. O método para adicionar e subtrair números positivos e negativos denominava-se “método do positivo e do negativo”. Lê-se no texto original:

O método dos estados positivos e negativos: para subtrair — mesmos sinais subtraem-se, sinais diferentes somam-se, positivo de nada torna-se negativo, negativo de nada torna-se positivo; para somar — sinais diferentes subtraem-se, os mesmos sinais somam-se, positivo e nada é positivo, negativo e nada torna-se negativo. (Texto do Problema 3 do capítulo “Equações”) (cf. Li e Du, 1987, p. 49)

As regras sobre números positivos e negativos cingem-se apenas à adição e à subtração e nunca à multiplicação ou divisão. Não será isso de admirar tendo em conta que, para Liu Hui, o comentador do séc. III d.C., os números

positivos e negativos são representados como ‘lucro’ (得, *de*) e como ‘perda’ (失, *shi*). Essas perdas não eram meramente financeiras mas objectos independentes, resultado de subtracções impossíveis. Liu Hui sugeriu que os números negativos fossem tratados como abstrações. Assim, quando um número era considerado negativo, não significava necessariamente que havia uma perda, tal como um número positivo não tinha de significar que havia um lucro (Straffin, 1998, p. 164).

Na escrita, um número negativo distinguia-se por um traço oblíquo que o atravessava, ou utilizavam-se caracteres especiais. No cálculo com varinhas, além de se distinguirem pelas varinhas de cor diferente (vermelho para os números positivos ou preto para os números negativos), também se podiam distinguir pela forma (corte triangular no topo para os positivos; corte quadrado para os negativos) ou pela posição (perpendicular para os positivos; transversal para os negativos).

Apesar da predilecção dos chineses pelo tangível, a noção de números negativos na China é pouco surpreendente porque, como faz notar Martzloff (1997, p. 200) a concepção de todos os fenómenos em termos de concomitância do positivo e do negativo, *yin* e *yang*, é característica deste povo. Consequentemente, os números negativos não eram considerados como se opondo aos positivos, mas como dois lados complementares do mesmo número. Os números positivos e negativos eram ambos *yin* e *yang*. Nos primeiros, porém, predominava o *yang* enquanto nos segundos predominava o *yin*. Além disso, ao atingir um estado paroxístico de *yang* ou do *yin*, tendiam a transformar-se um no outro.

Todavia, no *Jiuzhang*, os números positivos e negativos ocorrem apenas enquanto cálculos intermediários durante a execução de algoritmos muito particulares. E, no *Suanxue Qimeng*, de Zhu Shijie (1299), assim como no *Shushu Jiuzhang*, de Qin Jiushao (1247), ocorrem apenas enquanto cálculos intermediários durante a execução de algoritmos para extrair raízes de polinómios. A noção não foi transposta para outras áreas (Martzloff, 1997, p. 201).

O comentário de Liu Hui

No comentário ao *Jiuzhang*, Liu Hui (劉徽, do Reino de Wei) corrigiu erros e imprecisões e propôs várias novas fórmulas e soluções, enriquecendo muito o conteúdo da obra.

Grandes desenvolvimentos levados a cabo por Liu Hui foram estabelecer a base do cálculo de π na China através da divisão dos círculos e da “procura pelo micro-número”; demonstrar com rigor a fórmula para achar a área de um círculo; desenvolver o princípio de redução de fracções a um denominador comum; a derivação do volume de sólidos piramidais e a reflexão em torno do

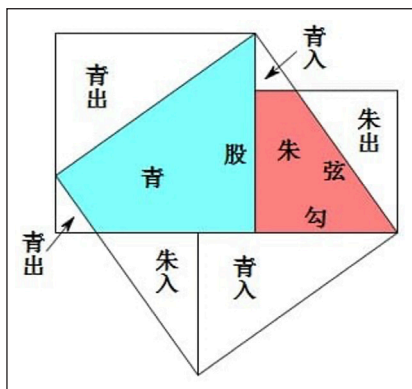
volume da esfera, que seria finalizada por Zu Gengzhi (祖庚之) no séc. V. Com efeito, Liu Hui projectou o *mouhefanggai* (牟合方蓋), abrindo assim caminho a que Zu Gengzhi, duzentos anos mais tarde, pudesse resolver o problema do volume da esfera. O *mouhefanggai* é o sólido obtido pela intersecção de dois cilindros iguais que se penetram ortogonalmente. Também é conhecido como sólido ‘de Steinmetz’, matemático polaco que nasceu em 1865 e tornou a resolver o problema da determinação do volume da intersecção. Ao refinar o cálculo para a área do círculo de Liu Hui, Zu Chongzhi (祖冲之), pai de Zu Gengzhi, deduziu daí uma excelente aproximação: $\pi = 355/113$, comumente chamada “de Mélius” (1586). Zu Gengzhi, esse, justificou o cálculo do volume da esfera aplicando ao *mouhefanggai* o princípio dito “de Cavalieri”.

Para mais, Liu Hui tentava provar as suas afirmações. Com efeito, trata-se do texto mais importante anterior ao séc. XIII a conter provas no sentido moderno. Acentuando a vocação teórica na China, Liu Hui sintetiza assim no prefácio do seu comentário a sua concepção da matemática e a função didáctica:

Se a estrutura interna (理 *li*) for analisada através de formulações verbais (辭 *cí*), se os corpos físicos forem escrutinados através de diagramas/figuras (圖 *tu*) então podemos tornar [o conteúdo da obra] simples, mas preciso, apto à comunicação e não obscuro, e quem o ler compreenderá por isso mais do que metade. (析理以辭, 解體用圖, 庶亦約而能週, 通而不贖, 覽之者思過半矣。) (cf. Chemla e Guo, 2004, p. 127)

A menção a diagramas é de extrema importância. Os chineses revelaram ao longo da história uma grande predilecção pelo pensamento diagramático, não só no âmbito da matemática, mas no âmbito de todas as temáticas que implicam alguma abstracção. Infelizmente, muitos dos diagramas dos antigos matemáticos perderam-se.

Liu Hui servia-se de um princípio de equidecomposição (invariância da área ou do volume de uma figura por fragmentação e reunião das diversas partes) para explicar resultados de álgebra elementar e de geometria (teorema ‘de Pitágoras’, diâmetro do círculo inscrito num triângulo, identidades). Para tanto, utilizava peças coloridas que manipulava como um *puzzle*. Assim, para provar que a área do quadrado da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados da “base” (*gou* 勾) e do “lado” (*gu* 股), reconstruiu fisicamente o quadrado da hipotenusa cobrindo-o com as peças dos dois quadrados dos catetos:

**FIGURA 2**

Reconstituição das peças de Liu Hui

Fonte: <https://read01.com/PQ5nB4.html#YlrYCNrMJPY>

O mesmo matemático também calculou a área do círculo através de uma sequência de polígonos regulares de lados 6×2^n ($n = 1, 2, \dots, 5$) e chegou ao enquadramento $314\,646/25 < 100\pi < 314\,169/625$. Além disso, deu uma justificação para o algoritmo da raiz cúbica através de uma figura tridimensional (os seus diagramas perderam-se, mas são fáceis de reconstruir a partir das descrições verbais).

Não obstante apresentarem cálculos que diferiam dos antigos gregos, Liu Hui, Zu Genzhi e Zu Chongzhi construíram argumentos de grande clareza, alguns dos quais subjacentes ao cálculo integral (Sraffin, 1998, p. 163). Mas, uma vez passada a sua época, a importância das provas e das justificações foi diminuindo.

O Haidao

Outra obra do matemático excepcional que foi Liu Hui é o *Haidao suanjing* (*Clássico de Matemática da Ilha Marítima*). O conteúdo diz respeito ao “método das diferenças duplas” (重差, *chong cha*), usado em levantamentos de agrimensura e topografia. A agrimensura era crucial na época devido a constantes batalhas campais e a uma administração burocrática. Esta obra teve, por isso, um grande impacto.

Trata-se de uma compilação de soluções para nove problemas que contêm várias incógnitas. Liu Hui não só dava as respostas como fornecia provas da correcção do método utilizado, acompanhadas por diagramas. O primeiro pro-

blema é acerca de uma montanha numa ilha marítima inacessível: como determinar a sua altura e a distância a que estamos dela? O segundo problema consistia em descobrir qual a altura de um pinheiro sobre a mesma montanha. O terceiro, achar a distância até uma cidade quadrangular e o comprimento do seu lado; o quarto, a profundidade de um precipício; o quinto, a altura de uma torre sobre uma colina, colocando-se o observador na planície; o sexto, a largura de um estuário; o sétimo, a profundidade de um abismo cheio de água límpida; o oitavo, a largura de um vau avistado de uma colina; e o nono, as dimensões de uma cidade lóbrigada de uma montanha a seu lado.

O Sun Zi

Era pelo *Sun Zi suanjing* (*Clássico da Matemática de Sun Zi*), do séc. V d.C., que se iniciavam os estudos na Academia Imperial de Matemática. No prefácio, a polivalência e vantagens de 算, *suan*, ou seja, do cálculo matemático e de previsão, são enumeradas e objecto de um discurso encomiástico que o descreve como a base para a compreensão de tudo no universo. Embora um pouco longa, a passagem merece ser lida:

O Mestre Sun afirma que, através do cálculo/previsão, se pode compreender o comprimento e a largura do Céu e da Terra, a origem dos seres vivos, a raiz das cinco virtudes constantes (五常) [benevolência, rectidão, temperança, sabedoria, confiança], o progenitor do *yin* e do *yang*, a formação das estrelas, o exterior e o interior da das Três Luzes (三光) [o sol, a lua e as estrelas], o equilíbrio das cinco fases (五行) [fogo, água, madeira, metal, terra], o início e o fim das quatro estações, o antepassado das Dez Mil Coisas e a regulamentação das seis artes cavaleheiras (六藝) [Ritos, Música, Tiro ao arco, Condução de carros de guerra, Caligrafia e Matemática]. Pode examinar-se as idas e vindas das relações, investigar a ascensão e queda das duas energias (二氣) [*yin* e *yang*], prever a mudança do frio e do calor, medir a distância entre perto e longe, observar com precisão o fundamento da Via Celestial (天道), encontrar distâncias horizontais e verticais na Terra, localizar divindades (神祇), prever o sucesso e o fracasso, compreender o princípio da virtude (道德), investigar a situação de uma vida, estabelecer regras, regular o redondo e o quadrado, lidar com as leis, estimar o *chi* (尺) e o *zhang* (丈) [medidas chinesas de comprimento 1 *zhang* = 10 *chi*], estabelecer equilíbrios, equilibrar diferenças e distinguir pequenas diferenças. O cálculo não se deteriora através das eras e pode ser utilizado nas oito direcções que não encontrará limites... Quem o segue enriquece. Quem lhe vira as costas empobrece... Quem deseja estudá-lo deve conseguir aplicar-se. Quem se concentrar em aprender decerto será bem-sucedido. (cf. Au Yong, 2018, p. 79)

O *Sun Zi* divide-se em três volumes. O primeiro volume começa por descrever os sistemas de medidas de comprimento, peso e capacidade e prossegue com uma breve apresentação de certos caracteres especiais que denotavam potências de dez (de 10^4 até 10^{80}). Colocavam-se esses caracteres especiais (como ‘dez’, ‘cem’, ‘mil’, ‘dez mil’, etc.) atrás dos dígitos para se indicar a respectiva potência de dez. Note-se que, no âmbito das obras de matemática, quando se mencionava algum número este era redigido através de caracteres da escrita chinesa. Por exemplo, no *Jiuzhang* é em caracteres chineses que aparece o maior número do conjunto dos *Dez Clássicos*: 一萬六千四百四十八億六千六百四十三億七千五百, ou seja, 1644 866 437 500. O sistema numérico baseado nas varinhas só era utilizado para cálculos. O *Sun Zi* explica também como multiplicar, dividir e extrair raízes quadradas com varinhas. Foi a primeira vez que tais operações foram explicadas com alguma minúcia.

O segundo volume discute métodos de cálculo com fracções e extracção de raízes quadradas. O terceiro volume apresenta alguns problemas de aritmética bastante complexos. Por exemplo, dado o número de cabeças e o número de patas, achar o número de “galinhas e coelhos na mesma gaiola”. Todavia, no seu conjunto, os problemas são mais simples do que os do *Jiuzhang*.

O problema mais célebre é o Problema 26 e encontra-se no último volume. É conhecido como “o problema do Mestre Sun”. Também é conhecido como o ‘problema chinês do resto’. Consiste em resolver sistemas de congruências simultâneas: temos coisas de que não sabemos o número. Se as dividirmos por três, o resto é dois. Se as dividirmos por cinco, o resto é três. Se as dividirmos por sete, o resto é dois. Quantas coisas são? A resposta é: 23 (Cf. Martzloff, 1998, p. 310).

Yang Hui retomará o mesmo problema em 1275, oito séculos depois. Apresenta cinco versões, mas as regras que usa estão ao mesmo nível do *Sunzi*. O *Sunzi* oferece ainda uma tabela de multiplicação para produtos de números com um único dígito, começando em 9×9 e terminando em 1×1 ⁶⁵.

O Zhang Qiuqian

No *Zhang Qiuqian suanjing* (Clássico da Matemática de Zhang Qiuqian), Zhang Qiuqian (張丘建, séc. V d.C.) presta especial atenção aos cálculos com fracções. Coloca cerca de uma centena de problemas divididos por três secções, sem organização temática. Pode ler-se no prefácio: “Quem aprende a calcular não receia as dificuldades da multiplicação e da divisão, no entanto, é-lhe difícil encontrar denominadores comuns”. Embora faltem capítulos à obra, apresenta ainda problemas relativos a cálculos com sequências e séries, fornecendo algumas fórmulas. Encontram-se também outras questões originais, ausentes do

venerável *Jiuzhang*, como problemas sobre o mínimo multiplicador comum ou problemas de progressões aritméticas.

Zhang Qiujiang resolvia correctamente problemas da teoria dos números, um dos quais ficou célebre, o ‘problema das cem aves’: achar o número de galos, galinhas e pintos, sabendo que um galo custa cinco moedas, uma galinha três, três pintinhos uma e que cem moedas permitem comprar cem aves. A solução era extremamente difícil de justificar tendo em conta as técnicas chinesas antigas. Só no ano de 1861 é que um autor chinês foi capaz de fornecer uma justificação cabal.

O Wucao

O *Wucao suanjing* (*Clássico da Matemática dos Cinco Departamentos Governamentais*), um texto anónimo de aritmética aplicada, data provavelmente também do séc. V d.C. Parece ter sido elaborado para quem se ocupava da direcção de tropas e da recolha de impostos nos Cinco Departamentos Governamentais instituídos na dinastia Wei. Esses departamentos eram o das terras agrícolas (田曹), do exército (兵曹), dos mercados (集曹), dos celeiros (倉曹) e das finanças (金曹). Há um capítulo dedicado a cada um deles, com um total de 67 problemas.

O primeiro capítulo contém dezanove fórmulas para calcular a área de terrenos com a forma de uma serpente, um muro, uma flauta, um corno de boi, etc., para além das áreas rectangulares, triangulares, trapezoidais e circulares que já surgiam no *Jiuzhang*. Muitas das soluções estão erradas mas são aproximações razoáveis que iam ao encontro de necessidades práticas. O segundo capítulo dedica-se à guerra. Os métodos de cálculo estão dentro do escopo do *Jiuzhang*, mas registam-se aqui algumas das primeiras aplicações sistemáticas da matemática em assuntos militares na China. Como determinar o número de soldados que uma população poderá dispensar? Como determinar o número de homens e carros para defender uma cidade? Como determinar a quantidade de provisões necessárias para homens e animais? Os capítulos seguintes apresentam problemas sobre o comércio de cereais e a quantidade de bens que se podem adquirir mediante determinada soma; taxas, transporte e armazenamento de cereais; compra e distribuição de seda, brocado, etc., assumindo apenas a regra de três e a conversão de unidades. Os três últimos capítulos usam métodos de cálculo, multiplicação, divisão e proporções que também já se encontravam no *Jiuzhang*.

O Jigu

No início do séc. VII d.C. e como o demonstra a sua obra, *Jigu suanjing* (*Clássico da Continuação da Matemática Antiga*), o calendariologista e matemático Wang Xiaotong (王孝通) já conhecia as equações de terceiro e quarto grau.

A obra contém vinte problemas que complexificam a matemática herdada até então. O problema n.º 1 é sobre calcular a posição da lua e, portanto, está relacionado com a astronomia e o cálculo de calendários. Os problemas n.º 2 a 5 relacionam-se com a construção de plataformas, diques, canais, etc. Os problemas n.º 6 a 14 são sobre a construção e reparação de vários tipos de depósitos e armazéns. Os problemas n.º 15 a 20 dizem respeito a triângulos rectângulos. Os seis problemas finais implicam a resolução de triângulos rectângulos que conduzem a equações polinomiais que são ou biquadradas ou de grau três.

Os problemas mais notáveis são acerca da construção de aterros cujas extremidades não têm a mesma largura e cujas alturas diferem; e de edifícios com formas irregulares, com um topo largo e uma base estreita ou com uma fachada alta e uma traseira baixa. Alguns deles implicam nada menos do que 25 cálculos.

4. A segunda grande época da antiga matemática chinesa: dinastias Song e Yuan

Nas dinastias Song e Yuan, a matemática chinesa atingiu um novo auge. Surgiram, uma após outra, obras de um nível muito superior ao vetusto *Jiuzhang*, com nomes como Yang Hui (杨辉), autor de *Xiangjie Jiuzhang suanfa* (詳解九章算法, *Análise Detalhada das Regras Matemáticas dos Nove Capítulos*), de c. 1275, e do *Xugu zhaiqi suanfa* (續古摘奇算法, *Continuação da Antiga Seleção de Maravilhas da Aritmética*); Qin Jiushao (秦九韶), autor do *Shushu Jiuzhang* (數書九章, *Tratado de Matemática em Nove Capítulos*), de 1247; Li Ye (李冶), autor do *Ceyuan haijing* (測圓海鏡, *O Espelho Marítimo para Medição de Círculos*), de 1248, e do *Yigu yanduan* (益古演段, *Matemática Antiga em Secções Expandidas*), de 1259; e Zhu Shijie (朱世傑), autor do *Siyuan yujian* (四元玉鑑, *O Espelho de Jade das Quatro Origens [as incógnitas]*), de 1303.

O Xiangjie Jiuzhang

No *Xiangjie Jiuzhang suanfa* (*Análise Detalhada das Regras Matemáticas dos Nove Capítulos*) surge, pela mão de Yang Hui, o triângulo dito ‘de Pascal’ como meio de cálculo dos coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$, mas sem qualquer ligação com a combinatória, domínio praticamente desconhecido entre os chineses. Não foi este autor, todavia, o seu inventor, mas Jia Xian (賈憲), cujo livro, de cerca de 1100 d.C. (ou seja, 500 anos antes de Pascal), se perdeu. Yang Hui,

porém, expõe o método de Jia Xian, tornando explícita a sua origem. O diagrama surge de novo no *Siyuan yujian* de Zhu Shijie, de 1303:

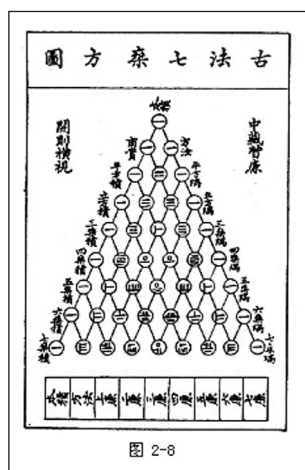


FIGURA 3

O diagrama do triângulo dito 'de Pascal'

Fonte: <http://hxceshi.com/m/view.php?aid=8846>

Yang Hui põe ainda uma questão interessante sobre a hipotenusa: “Suponha-se que a altura de uma porta é 6 *chi* e 8 *cun* maior do que a largura e que os cantos opostos estão afastados 1 *zhang* 丈. Qual a altura e a largura da porta?” Ao invés de desenvolver equações, Yang Hui concebeu antes um diagrama e, através dele, obteve o resultado correto.

O Xuqu Zhaiqi

O *Xugu zhaiqi suanfa* (Continuação da Antiga Seleção de Maravilhas da Aritmética) contém círculos mágicos (números naturais colocados em círculos em que a soma dos números em cada círculo e a soma dos números nos diâmetros equivalem) e quadrados mágicos de ordem superior a três mais antigos que se conhecem:

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
九	八	七	六	五	四	三	二	一	十
三	二	一	四	五	六	七	八	九	十
九	八	七	六	五	四	三	二	一	十
五	四	三	二	一	六	七	八	九	十
九	八	七	六	五	四	三	二	一	十
五	四	三	二	一	六	七	八	九	十
九	八	七	六	五	四	三	二	一	十
五	四	三	二	一	六	七	八	九	十
九	八	七	六	五	四	三	二	一	十

FIGURA 4

Quadrado mágico de Yang Hui

Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/YANG_HUI_10_X_10_MAGIC_SQUARE.jpg

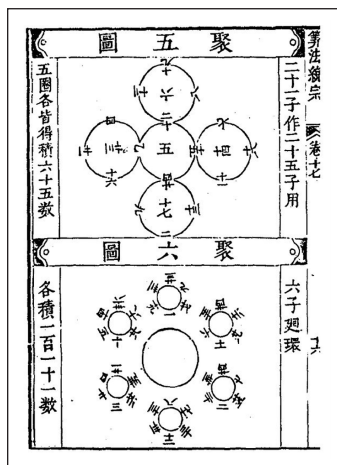


FIGURA 5

Círculos mágicos de Yang Hui

Fonte: [https://www.wikiwand.com/en/Magic_circle_\(mathematics\)](https://www.wikiwand.com/en/Magic_circle_(mathematics))

Yang Hui chama-lhes *zonghengtu* (縱橫圖, diagramas transversais e longitudinais) e parece não terem qualquer conexão com a adivinhação, nem com qualquer outro propósito esotérico. Embora os círculos só tenham sido encontrados na China, suspeita-se que os seus quadrados mágicos resultem de influência islâmica.

O Shushu Jiuzhang

Com o *Shushu Jiuzhang* (Tratado de Matemática em Nove Capítulos), Qin Jiushao mostrou a possibilidade de um método para resolver qualquer questão do género do ‘problema chinês do resto’, ou seja, a regra geral para resolver problemas de congruências, a que chamou *dayan zongshu shu* (大衍總數術), “o grande procedimento de inferência para todos os números”. O termo *dayan* parece ter sido retirado do *Yijing* (Clássico das Mutações), mas em Qin Jiushao o aspecto divinatório está ausente. Qin Jiushao também utilizou o equivalente à forma mais simples de determinantes para resolver equações simultâneas.

Qin Jiushao avançou ainda com o *zhengfu kaifang shu* (正負開方術) ou “procedimento para a extracção da raiz com números positivos e negativos”, um método para calcular as raízes de equações algébricas de todos os graus.

Os capítulos intitulam-se “A grande inferência” (*dayan* 大衍); “O tempo celeste”; “Os limites dos campos”; “As medidas por observação”; “Impostos e tra-

balhadores”; “Dinheiro e grãos”; “Fortificações e edifícios”; “Exércitos e marchas”; “Mercados e bens”.

O terceiro capítulo lida com o problema da delimitação de terrenos de uma forma original. Para calcular a área de um ‘terreno pontiagudo’ (尖田 *jian tian*), Qin Jiushao não estima directamente a área da figura. Apresenta-a como a raiz de uma equação de grau quatro cujos coeficientes dependem das dimensões da figura.

A mesma secção contém a primeira ocorrência na China da fórmula conhecida como ‘de Heron’, utilizada para calcular a área de um triângulo arbitrário como uma função do comprimento dos lados (Martzloff, 1997, p. 151).

O Ceyuan

O *Ceyuan haijing* (O Espelho Marítimo para Medição de Círculos), de Li Ye, é um tratado em doze capítulos: começa com o prefácio do autor; segue-se uma figura geométrica, uma informação preliminar e 170 problemas (capítulos 2 a 12).

Toda a obra se baseia na figura geométrica de um círculo dentro de um triângulo. Os problemas dizem respeito, por exemplo, a encontrar os diâmetros dos círculos nela inscritos.

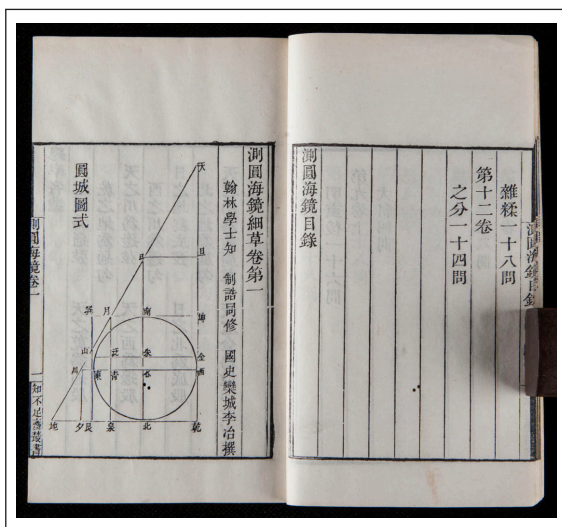


FIGURA 6

Figura geométrica do *Ceyuan haijing*

Fonte: <https://m.qudiandi.com/product/item/pid/10093654.html>

A figura é lida como um mapa da rede de estradas em torno de uma cidade, a qual é representada pelo círculo. Deste modo, a maior parte dos problemas descrevem personagens que percorrem estradas e se avistam numa ou noutra parte da cidade. Por exemplo: Jia sai da porta oeste e caminha 480 passos em direcção ao sul; depois pára. Yi, partindo de Gen, caminha 80 passos em direcção ao leste e avista Jia ao longe, do outro lado da cidade.

O círculo ocupa uma posição específica em relação a cada um dos triângulos. Além disso, a soma dos três lados de cada triângulo é uma função simples das dimensões do triângulo maior. Conhecendo o diâmetro do círculo em função das dimensões do triângulo maior, deduz-se facilmente o diâmetro do círculo em função das dimensões de cada triângulo e, logo, a fórmula do diâmetro de um círculo numa posição específica em relação a um triângulo. Os cálculos efectuavam-se sempre numa tabela de contagem.

Martzloff (1997, p. 146) faz notar que Li Ye nunca explica como resolver equações, mas apenas como as construir. Também nunca explicita o que entende por uma equação, uma incógnita, um número negativo, etc. Limita-se a descrever as manipulações necessárias para a resolução de certos problemas, sem se dar ao trabalho de fornecer definições, regras ou teoremas. Ou seja, demonstra a álgebra apenas através da sua aplicação. No entanto, não limita a sua reflexão a equações de grau dois ou três. Avança para equações polinomiais de um grau arbitrariamente elevado. Mas, como afirmam O'Connor e Robertson (2003):

O tipo de problema relacionado com a solução de equações cúbicas, quadráticas e de ordem superior que preocupava os matemáticos dos países islâmicos e da Europa não parece ter surgido na China. Li Ye compraz-se com equações de qualquer grau e, embora não explicita os métodos para resolver as equações, é forçoso presumir que usou métodos semelhantes aos que Ruffini e Horner descobriram 600 anos depois.

O Yigu

No *Yigu yanduan*, (*Matemática Antiga em Secções Expandidas*) Li Ye mostra como resolver 64 problemas através do *tianyuanshu* (天元術 ou “arte da raiz celeste”), um procedimento algébrico para equações polinomiais que já existia anteriormente. O tema é a construção e formulação de equações quadráticas derivadas de problemas em quadrados, rectângulos e círculos.

Como sublinha Bo Jiajia (2012, p. 10 e sgs.), uma das características mais importantes desta obra reside numa prática não-discursiva: a manipulação de um grande número de diagramas. Com efeito, é através do pensamento diagramático que a solução dos problemas propostos deve ser encontrada.

Todos os problemas dizem respeito a calcular o diâmetro ou o lado de um terreno dentro do qual há um lago. Mas as formas do terreno e do lago vão mudando. Cada problema principia com uma pergunta; segue-se a resposta; segue-se um diagrama do terreno e do lago com indicação de uma ou mais distâncias; segue-se a resolução do problema começando pela escolha da incógnita e terminando com a criação da equação algébrica que a incógnita satisfaz, segundo o procedimento *tiaoduanshu* (條段術, arte da secção por partes [de áreas]), derivando os termos da equação da geometria; e termina-se (em 23 do total dos problemas) com um antigo procedimento (舊術, *jiushu*), também ele de cariz geométrico.

O *Siyuan*

Em 1303, Zhu Shijie apresentava no *Siyuan yujian* (*O Espelho de Jade das Quatro Origens* [as incógnitas]) fórmulas somatórias de vulto, mas sem as respectivas provas. Aplicavam-se a séries que têm por termo geral o produto de uma sequência aritmética por um número natural, triangular ou quadrado.

A principal preocupação do *Siyuan* é a solução de sistemas de equações quadráticas e de grau superior, até ao grau 14. Outra preocupação importante do *Siyuan* são somas de séries com um número finito de termos. É de notar que as séries já não se encontravam restringidas pela necessidade de correspondência a uma qualquer aplicação concreta. Zhu Shijie procurou libertar-se do pendor pragmático da matemática tradicional. Embora a obra apresente os costumeiros problemas práticos típicos dos *Dez Clássicos* (arquitetura, finanças, logística militar, etc.), combinava quantidades não homogêneas e somava áreas a volumes e preços a comprimentos. Principiava pela soma de uma série para encontrar o número de termos ou assumia que o volume de uma figura era conhecido antes de indagar acerca das suas dimensões lineares. Colocava problemas acerca da divisão de figuras (divisão de um trapézio em partes iguais usando paralelas à base, divisão de um disco usando raios paralelos). Também recorreu à famosa fórmula de interpolação dita ‘de Newton’. Com o seu espírito rebelde, Zhu Shijie chegou mesmo a enfurecer as autoridades militares ao sugerir que o número de soldados recrutados variasse de acordo com os quadrados ou os cubos dos termos sucessivos de uma progressão matemática (Martzloff, 1997, p. 155).

Zhu Shijie desenvolveu a álgebra de polinómios *tianyuanshu* contendo até quatro incógnitas. Com efeito, a obra apresenta sete problemas de sistemas de equações de quatro incógnitas, treze problemas de sistemas de equações de três incógnitas e 36 problemas de sistemas de equações de duas incógnitas. Zhu Shijie chegou lá atribuindo a lugares particulares da tabela de contagem as varinhas correspondentes aos coeficientes numéricos dos monómios. A equação

final de um problema resultava ou de uma subtração entre duas quantidades iguais calculadas verbalmente de duas maneiras diferentes, ou da eliminação sucessiva das variáveis entre sistemas de polinómios. Foi uma generalização destes métodos que conduziu o matemático japonês Seki Takakazu (関孝和, 1642-1708) à descoberta dos determinantes no final do séc. XVII, de forma independente de Leibniz.

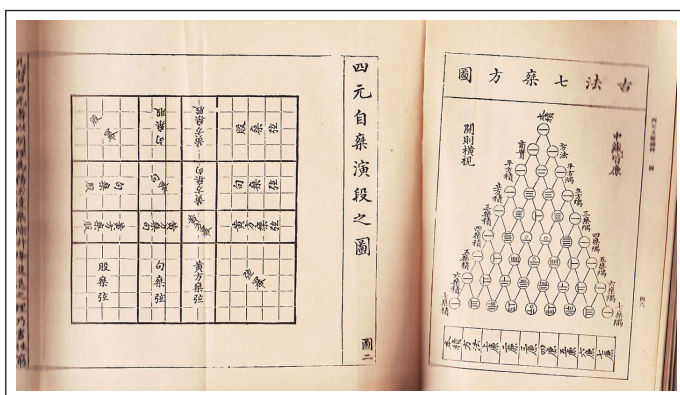


FIGURA 7

Siyuan yujian: matriz usada no cálculo com varinhas para resolver um sistema de equações

Fonte: <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%9B%E5%85%83%E7%8E%89%E9%89%B4#/media/File:%E5%9B%9B%E5%85%83%E8%87%AA%E4%B9%98%E6%BC%94%E6%AE%B5%E5%9B%BE.jpg>



FIGURA 8

Siyuan yujian: Tábua que inclui tudo quanto é essencial para extrair raízes quadradas na maneira antiga e na maneira moderna

Fonte: <https://book.kongfz.com/33619/3044367983/>

5. Conclusão

Na China antiga, a matemática era, como se viu, das mais avançadas do mundo. As causas da sua subsequente estagnação e relativo declínio ainda não estão completamente esclarecidas.

A partir de 1500, através de um comentário ao *Haijing* de Li Ye, percebe-se que os matemáticos já não compreendiam nem o método dos polinómios nem o método geral para extrair as raízes de uma equação, duas das maiores conquistas do séc. XIII.

Nos anos 1600, a maioria dos textos importantes do passado matemático chinês perdera-se. Os matemáticos tornaram-se incapazes de uma compreensão completa dos métodos expostos e dos objectos referidos nos tratados sobreviventes. Os brilhantes métodos algébricos do séc. XIII caíram no esquecimento.

O ábaco chinês (算盤, *suanpan*) difundiu-se no séc. XV, embora existisse, pelo menos, desde o séc. XIII. A sua origem é incerta. Tornou-se então o instrumento de cálculo por excelência, suplantando o uso das varinhas, cuja história era quase desconhecida. (Au Yong, 2018, 47). A maior parte das obras de matemática passou a ser consagrada ao ábaco.

Mas os matemáticos chineses foram então expostos aos textos de matemática do Ocidente. Em 1606, o jesuíta italiano Matteo Ricci (que anotou no seu diário que “nenhum povo tem a matemática em tão alta estima como os chineses”^[4]) e o letrado Xu Guangqi (徐光啟) traduziram para chinês os seis primeiros livros dos *Elementos de Geometria* de Euclides. Seguiram-se tentativas de síntese entre esta geometria e a antiga geometria chinesa, ilustrada pela actividade do matemático Mei Wending (梅文鼎, 1633-1721). Como consequência, nos anos 1700, graças aos conhecimentos de álgebra recentemente adquiridos, foi possível reconstruir os métodos algébricos das obras do séc. XIII^[5].

Os matemáticos chineses dos sécs. XVII, XVIII e XIX foram os primeiros a trabalhar sobre a história da matemática do seu país. No início do séc. XVIII desencadeou-se uma investigação sistemática de todos os textos antigos. O trabalho de edição e de análise de então influenciou o tipo de investigação que os matemáticos chineses levaram a cabo posteriormente. E forneceu os textos que servem ainda hoje de base para os historiadores de ciência. Constituiu-se assim uma das mais antigas tradições de História da Matemática na qual a ac-

4. Citado em (Siu, 1993, p. 345).

5. Para este novo renascimento da matemática chinesa ver Catherine Jami (2012), *The Emperor's New Mathematics. Western Learning and Imperial Authority during the Kangxi Reign (1662-1722)*, Oxford University Press.

tividade de historiadores se articulou, desde o início, com as investigações em matemática.

A autora escreve segundo a antiga ortografia.

Data de receção: 02/05/2022

Data de aprovação: 25/10/2022

Referências

- Au Yong, Ke-Xin (2018). *The Ten Mathematical Classics: The Mathematics and Mathematical Education of Pre-Modern China*. Universidade de Alberta. Tese de Doutorado em História. Bo Jiajia (2012) *Exploring the Features of Algebra in Medieval China: the Case of Yigu yanduan*. Taiwan National Normal University. PhD thesis.
- Chemla, K. (1985). Les Mathématiques Anciennes Retrouvées, *Sciences et Avenir*, n.º 459, 1985, p. 43.
- Chemla, K. e Guo Shuchun (2004). Préface de Liu Hui, in: *Les Neuf Chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Paris: Dunod, pp. 125-129.
- Chemla, K. & 林力娜 (2013). Shedding Some Light on a Possible Origin of a Concept of Fractions in China: Division as a link between the newly discovered manuscripts and “The Gnomon of the Zhou [Dynasty]”, *Sudhoffs Archiv*, 97(2), 174-198. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/43694473>
- Chemla (2019). Different clusters of text from ancient China, different mathematical ontologies, *HAU: Journal of Ethnographic Theory* 9 (1): 99-112.
- Cullen, C. (1996). *Astronomy and Mathematics in Ancient China: the Zhou bi suan jing*, Cambridge University Press, 2006.
- Dauben, J. W. (2014). The Evolution of Mathematics in Ancient China: from the newly Discovered Shu and Suan Shushu Bamboo Texts to the Nine Chapters on the Art of Mathematics, *Notices of the ICCM*, (Dez. 2014), Vol. 2, n.º 2, pp. 24-51.
- Li Yan e Du Shiran (1987). *Chinese Mathematics. A Concise History*, Oxford: Clarendon Press.
- Martzloff, J-C. (1997). *A History of Chinese Mathematics*, New York: Springer, 2006.
- Needham, J. (1959). *Science and Civilization in China*, vol. 3: *Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*, Cambridge: Cambridge University Press.
- O'Connor, J. e Robertson, E. (2003). Li Zhi, in *MacTutor History of Mathematics Archive*, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Li_Zhi/
- Swetz, F. (1979). The Evolution of Mathematics in Ancient China, *Mathematics Magazine*, vol. 52, no. 1, January 1979.
- Siu, M-K. (1993). Proof and Pedagogy in Ancient China: Examples from Liu Hui's Commentary on *Jiu Zhang Suan Shu*, *Educational Studies in Mathematics* 24: 345-347, 1993.
- Straffin, P. D. Jr. (1998). Liu Hui and the First Golden Age of Chinese Mathematics, *Mathematics Magazine*, vol. 71, no. 3, June 1998.

Sobre a autora

CLÁUDIA RIBEIRO é Doutora e Mestre em História e Filosofia das Ciências (CFCUL) e Mestre em Estudos Asiáticos (UCP). É autora de *Uma Escrita Celeste. Distância lexical e imanência de significado no Tianshu (Livro do Céu) de Xu Bing*; de *Electrões Inobserváveis e Estrelas Invisíveis. Em torno do problema do realismo em ciência*; de *No Dorso do Dragão. Aventuras e desventuras de uma portuguesa na China*; e de diversos artigos académicos.

[ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6835-0515>]

About the author

CLÁUDIA RIBEIRO has a PhD and a Master degree in History and Philosophy of Sciences (University of Lisbon), and a Master in Asian Studies (Portuguese Catholic University). She is the author of *Uma Escrita Celeste. Distância lexical e imanência de significado no Tianshu (Livro do Céu) de Xu Bing*; of *Electrões Inobserváveis e Estrelas Invisíveis. Em torno do problema do realismo em ciência*; of *No Dorso do Dragão. Aventuras e desventuras de uma portuguesa na China*; and of several academic papers.

[ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-6835-0515>]